

# Dynamische Makroökonomik

Eine Einführung in die Modellierung stochastisch-dynamischer  
Gleichgewichtsmodelle

Timo Baas  
Universität Duisburg-Essen

23. Juni 2018  
Präsentation Vorlesung

## 1 Das RBC Modell von Hansen

- Das einfache Hansen Modell
  - Log-Linearisierung
  - Beispiel Cobb-Douglas Funktion
  - Uhligs Methode der Log-Linearisierung
  - Cobb-Douglas Produktionsfunktion
  - Definitionen und Regeln
- Lösung des Hansen Modells
  - Die Log-Lineare Version des Hansen Modells
  - Lösung des log-linearen Modells mit Hilfe von Jump Variablen
  - Tensor Algebra
  - Kalibrierung
- Varianz der Variablen des Modells

## 2 Das Hansen Modell mit unteilbarer Arbeit

- Stationärer Zustand
- Vergleich des Steady-States beider Modelle
- Log-Lineare Version des Modells
- Numerische Lösung

### 3 Lösung nach Blanchard Kahn

- Problembeschreibung
- Stochastische Schocks
- Hansens Modell nach Blanchard-Kahn
- Die generalisierte Schur Methode
- Numerische Lösung

## Kydland und Prescott (1982)

- Das erste RBC Modell geht auf Kydland und Prescott zurück
- Dieses Modell enthielt Elemente, die die Persistenz und Transmission von Technologieschocks beeinflussen können

## Elemente des K-P Modells

- Die Investitionen können nicht direkt in Kapital umgewandelt werden
- Die Kapitalbildung beruht auf Investitionen mehrerer Perioden
- Freizeit in der Nutzenfunktion beruht auf der Nichtarbeitszeit der aktuellen Periode und der Vorperioden
- Vorratshaltung wird eingeführt
- Technologieschocks besitzen eine permanente und eine temporäre Komponente

# Kritik

- Implikationen?

## Hansen (1985)

- Hansen entwickelte einige Referenzmodelle der RBC Literatur
  - Stochastisches Modell mit variabler Arbeit
  - Stochastisches Modell mit unteilbarer “indivisible labor” Arbeit
- Er geht der Frage nach, inwiefern die Momente 2. Ordnung der Zeitreihen der Vereinigten Staaten durch ein Modell mit unteilbarer Arbeit “besser” erklärt werden können

## Lösung des Hansen Modells

- Zur Lösung des Hansen Modells müssen wir die Wurzel einer Gleichung mit einer quadratischen Matrix finden
- Eine analytische Lösung ist nicht möglich
- Wir wählen die Parameterwerte, indem wir das Modell kalibrieren



## Lösungsverfahren

- 1 Finde die Parameter des Modells (Ergebnisse aus der Literatur und aus eigenen Simulationen)
- 2 Kalibriere das Modell
- 3 Finde die Bewegungsgleichungen
- 4 Kalkuliere die Varianz, die das Modell für ein endogenes Set aus Variablen generiert
- 5 Vergleiche diese Varianz entweder mit der Varianz eines Referenzmodells oder der Varianz realer Zeitreihen

## Der repräsentative Haushalt

- Ein repräsentativer Haushalt maximiert eine diskontierte Nutzenfunktion der Form

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, l_t),$$

wobei  $c_t$  den Konsum in Periode  $t$  und  $l_t$  die Freizeit in Periode  $t$  darstellt. Es gilt  $l_t = 1 - h_t$  mit  $h_t$  als Arbeitseinsatz in Periode  $t$ .

## Subnutzenfunktion

- Wir verwenden eine Subnutzenfunktion der Form

$$u(c_t, 1 - h_t) = \ln c_t + A \ln(1 - h_t)$$

mit  $A > 0$ .

## Produktionsfunktion

Die Firmen produzieren ein homogenes Gut, welches sowohl als Konsum- als auch als Investitionsgut eingesetzt werden kann. Die Produktionsfunktion lautet:

$$f_t(\lambda_t, k_t, h_t) = \lambda_t k_t^\phi h_t^{(1-\phi)},$$

hierbei ist  $\lambda_t$  ein stochastischer Technologieterm, welcher folgendem AR(1)-Prozess folgt:

$$\lambda_{t+1} = \mu\lambda_t + \epsilon_{t+1}$$

mit  $0 < \mu < 1$ . Der Schockterm  $\epsilon_t$  ist in jeder Periode identisch, unabhängig gleichverteilt, positiv, nach oben beschränkt und weist einen Erwartungswert von  $1 - \mu$  auf. Der Erwartungswert von  $\lambda_t$  ist folglich 1.

# Kapitalakkumulation

Die Kapitalakkumulation folgt dem bekannten Prozess

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t$$

## Budgetrestriktion

Die Budgetrestriktion lautet entsprechend

$$f(\lambda_t, k_t, h_t) \geq c_t + i_t$$

für jede Periode  $t$ .

## Bellmangleichung

Das Modell kann mithilfe einer Bellmangleichung aufgestellt werden

$$V(k_t, \lambda_t) = \max_{c_t, h_t} [\ln c_t + A \ln(1 - h_t) + \beta E_t[V(k_{t+1}, \lambda_{t+1}) | \lambda_t]]$$

## Nebenbedingungen

Unter den Nebenbedingungen

$$\lambda_t k_t^\phi h_t^{(1-\phi)} \geq c_t + i_t$$

$$\lambda_{t+1} = \mu \lambda_t + \epsilon_{t+1}$$

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t$$



## Erwartungsterm

Der Erwartungsterm  $E_t[V(k_{t+1}, \lambda_{t+1})|\lambda_t]$  zeigt an, dass die Erwartungen bedingt an die Realisation von  $\lambda_t$  gebildet werden

## Substitution

Wir substituieren nun die Nebenbedingungen in die Bellman Gleichung

$$V(k_t, \lambda_t) = \max_{k_{t+1}, h_t} [\ln(\lambda_t k_t^\phi h_t^{1-\phi}) - k_{t+1} + (1 - \delta)k_t] + A \ln(1 - h_t) \\ + \beta E_t[V(k_{t+1}, \lambda_{t+1}) | \lambda_t]$$

Die Kontrollvariablen lauten nun

$$k_{t+1}, h_t$$

## Bedingungen erster Ordnung

Wir entwickeln nun die Bedingungen erster Ordnung der Bellman Gleichung

$$\frac{\partial V(k_{t+1}, h_t)}{\partial k_{t+1}} = 0 = -\frac{1}{\lambda_t k_t^\phi h_t^{(1-\phi)} + (1-\delta)k_t - k_{t+1}} + \beta E_t[V_k(k_{t+1}, \lambda_{t+1}) | \lambda_t]$$

## Bedingungen erster Ordnung

und die zweite Bedingung erster Ordnung lautet

$$\frac{\partial V(k_{t+1}, h_t)}{\partial h_t} = 0$$
$$= (1 - \phi) \frac{1}{\lambda_t k_t^\phi h_t^{(1-\phi)} + (1 - \delta)k_t - k_{t+1}} (\lambda_t k_t^\phi h_t^{-\phi}) - A \frac{1}{1 - h_t}$$

## Benveniste-Scheinkman Theorem

Die Benveniste-Scheinkman Envelope-Theorem Bedingung lautet

$$\frac{\partial V(k_t, \lambda_t)}{\partial k_t} = \frac{1}{\lambda_t k_t^\phi h_t^{(1-\phi)} + (1-\delta)k_t - k_{t+1}} (\phi \lambda_t k_t^{\phi-1} h_t^{(1-\phi)} + (1-\delta))$$

## Substitution - Envelope Bedingung

Wir substituieren nun die Envelope Bedingung in die Bedingungen  
1. Ordnung der Bellmangleichung

$$\frac{\partial V(k_{t+1}, h_t)}{\partial k_{t+1}} = 0 = -\frac{1}{\lambda_t k_t^\phi h_t^{(1-\phi)} + (1-\delta)k_t - k_{t+1}}$$
$$+\beta E_t\left[\frac{\phi \lambda_{t+1} k_{t+1}^{\phi-1} h_{t+1}^{(1-\phi)} + (1-\delta)}{\lambda_{t+1} k_{t+1}^\phi h_{t+1}^{(1-\phi)} + (1-\delta)k_{t+1} - k_{t+2}} \mid \lambda_t\right]$$

## Substitution - Envelope Bedingung

Die zweite Bedingung 1. Ordnung lautet

$$A(\lambda_t k_t^\phi h_t^{1-\phi}) + (1 - \delta)k_t - k_{t+1} = (1 - h_t)(1 - \phi)(\lambda_t k_t^\phi h_t^{-\phi})$$

## Umformung

Da die Budgetrestriktion

$$c_t = \lambda_t k_t^\phi h_t^{(1-\phi)} + (1 - \delta)k_t - k_{t+1}$$

gelten muss und bei vollkommenen Märkten die Produktionsfaktoren gemäß ihrer Grenzproduktivität entlohnt werden

$$r_t = \phi \lambda_t k_t^{(\phi-1)} h_t^{(1-\phi)}$$

und

$$w_t = (1 - \phi) \lambda_t k_t^\phi h_t^{-\phi}$$



## Euler-Gleichung

erhalten wir aus der Bedingung erster Ordnung die Euler-Gleichung

$$\frac{1}{c_t} = \beta E_t \left[ \frac{r_{t+1} + (1 - \delta)}{c_{t+1}} \mid \lambda_t \right],$$

und für die zweite Bedingung erster Ordnung

$$(1 - h_t)w_t = A c_t$$

## Steady-State

- Im Steady-State gilt:  $\bar{k} = k_t = k_{t+1} = k_{t+2}$  und  $\bar{h} = h_t = h_{t+1}$
- Hierdurch entfällt der Erwartungsoperator
- Die Steady-State Lösung ist identisch zum deterministischen Fall

## Steady-State Gleichung

$$\bar{h} = \frac{1}{1 + \frac{A}{(1-\phi)} \left[ 1 - \frac{\beta\delta\phi}{1-\beta(1-\delta)} \right]}$$

$$\bar{k} = \bar{h} \left[ \frac{\phi\bar{\lambda}}{\frac{1}{\beta} - (1-\delta)} \right]^{\frac{1}{1-\phi}}$$

## Dynamik des Modells

Um die Dynamik des Modells außerhalb des Steady-States zu ermitteln, gibt es eine Reihe von Möglichkeiten:

- Iterative Lösung
- Approximationen

# Iterative Lösung

- Iterative Lösung bei hinreichend geringer Anzahl an Zuständen des Technologieschocks
  - Vorteile:
    - gute Schätzung der Momente zweiter Ordnung,
    - Krümmung bleibt erhalten
    - keine Beschränkung auf Umgebung des Steady-States

## Nachteile

- Nachteile:
  - Rechenintensiv
  - Das Hansen Modell weist selbst bei kleiner Dimension von  $\epsilon_{t+1}$  eine hohe Dimension von  $\lambda_t$  auf, gegeben  $\lambda_{t+1} = \mu\lambda_t + \epsilon_{t+1}$

## Dimensionen von $\lambda_{t+1}$

Wir nehmen an, dass alle möglichen Werte für  $\epsilon_{t+1}$  durch die Funktionen  $1 - \mu + \Delta$  und  $1 - \mu - \Delta$  gegeben sind

- $\Delta$  ist eine kleine positive Zahl, die jeden dieser Werte mit der Wahrscheinlichkeit .5 annehmen kann
- Zum Zeitpunkt  $t$  ist  $\lambda_t = 1$
- Zum Zeitpunkt  $t + 1$  kann  $\lambda_{t+1}$  die Werte  $1 + \Delta$  und  $1 - \Delta$  annehmen
- Zum Zeitpunkt  $t + 2$  kann  $\lambda_{t+2}$  die Werte  $1 + (1 + \mu)\Delta$ ,  $1 + (1 - \mu)\Delta$ ,  $1 - (1 + \mu)\Delta$  und  $1 - (1 - \mu)\Delta$  annehmen
- Zum Zeitpunkt  $t + n$  kann  $\lambda_t + n$  also  $2^n$  Werte annehmen

## Iterative Lösung

- Dennoch ist es möglich, eine iterative Lösung für die auf den Variablen  $k_t$  und  $\lambda_t$  beruhende Wertfunktion zu finden
- Hierzu muss ein Wertebereich für beide Variablen gefunden werden, den die stochastische Zufallsvariable  $\lambda_t$  wahrscheinlich nicht verlässt
- Hierzu müssen wir zweidimensionale Interpolationen durchführen, um die Wertfunktion zu berechnen



## Approximationen

Falls das Modell zu komplex oder die Dimension der stochastischen Zustandsvariablen zu groß wird, bietet sich eine Approximation des Modells an

- Log-lineare Approximation der Bedingungen erster Ordnung und der Budgetrestriktionen
- Quadratische Approximation der Zielfunktion und Linearisierung der Budgetrestriktionen zur Anwendung der Linearen Programmierung

## Substitution von Variablen

- Um die Linearisierung des Modells zu erleichtern, wird das Hansen Modell umgeschrieben
- Hierzu werden die aggregierten Variablen verwendet

## Bedingungen 1. Ordnung

Die Bedingungen erster Ordnung lauten in umgeschriebener Form

$$1 = \beta E_t \left[ \frac{C_t}{C_{t+1}} (r_{t+1} + (1 - \delta)) \right]$$

und

$$(1 - H_t)(1 - \phi) \frac{Y_t}{H_t} = A C_t$$

## Budgetrestriktionen

Die zugehörigen Budgetrestriktionen lauten

$$C_t = Y_t + (1 - \delta)K_t - K_{t+1}$$

und

$$Y_t = \lambda_t K_t^\phi H_t^{(1-\phi)}$$

Die Verzinsung des Kapitals erfolgt entsprechend der Grenzproduktivität

$$r_t = \phi \frac{Y_t}{K_t}$$

# Verzinsung

- Hierbei ist  $r_t$  identisch zur Verzinsung einer Einheit Kapital
- Falls ein Haushalt eine Einheit Kapital besitzt und dieses zu Beginn der Periode  $t$  verleiht, erhält er den Zinssatz  $r_t$

## Log-Linearisierung

Wir nehmen ein nichtlineares Modell an, welches durch das folgende Set an Gleichungen dargestellt werden kann

$$F(x_t) = \frac{G(x_t)}{H(x_t)}$$

wobei  $x_t$  einen Vektor des Modells darstellt, der sowohl Erwartungsterme als auch zeitlich verzögerte Variablen und zeitgleiche Variablen beinhalten kann

# Technik

- 1 Wir nehmen zuerst den Logarithmus der Funktionen  $F()$ ,  $G()$  und  $H()$
- 2 Wir bilden dann die Taylor-Approximation 1. Ordnung

## Logarithmierung

Wir logarithmieren das Modell

$$\ln(F(x_t)) = \ln(G(x_t)) - \ln(H(x_t))$$

und bilden dann die Taylor Approximation um den Steady-State



## Taylor Approximation

$$\ln(F(\bar{x})) + \frac{F'(\bar{x})}{F(\bar{x})}(x_t - \bar{x})$$

$$\approx \ln(G(x_t)) + \frac{G'(\bar{x})}{G(\bar{x})}(x_t - \bar{x}) - \ln(H(\bar{x})) - \frac{H'(\bar{x})}{H(\bar{x})}(x_t - \bar{x}),$$

wobei die Notation  $X'(\bar{x})$  verwendet wird, um den Gradient im Steady-State zu bezeichnen. Das Modell ist nun linear in  $x_t$ , da  $\frac{F'(\bar{x})}{F(\bar{x})}$ ,  $\frac{G'(\bar{x})}{G(\bar{x})}$ ,  $\frac{H'(\bar{x})}{H(\bar{x})}$ ,  $\ln(F(\bar{x}))$ ,  $\ln(G(\bar{x}))$  und  $\ln(H(\bar{x}))$  jeweils Konstanten sind.

## Steady-State

Da der Steady-State folgendermaßen definiert ist

$$\ln(F(\bar{x})) = \ln(G(\bar{x})) - \ln(H(\bar{x})),$$

können wir nun die drei  $\ln(\cdot)$  Elemente entfernen und die Gleichung wie folgt vereinfachen

$$\frac{F'(\bar{x})}{F(\bar{x})}(x_t - \bar{x}) \approx \frac{G'(\bar{x})}{G(\bar{x})}(x_t - \bar{x}) - \frac{H'(\bar{x})}{H(\bar{x})}(x_t - \bar{x})$$

## Beurteilung

In der Umgebung des Steady-States sind die Taylor Terme zweiter oder höherer Ordnung klein genug, um als irrelevant zu gelten.

## Beispiel Cobb-Douglas Funktion

Wir logarithmieren eine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion der Form

$$Y_t = \lambda_t K_t^\phi H_t^{(1-\phi)}$$

$$\ln Y_t = \ln \lambda_t + \phi \ln K_t + (1 - \phi) \ln H_t$$

## Taylor Approximation

Gemäß der Taylor Approximation erster Ordnung gilt:

$$\ln \bar{Y} + \frac{1}{\bar{Y}}(Y_t - \bar{Y})$$

$$\approx \ln \bar{\lambda} + \frac{1}{\bar{\lambda}}(\lambda_t - \bar{\lambda}) + \phi \ln \bar{K} + \frac{\phi}{\bar{K}}(K_t - \bar{K}) + (1 - \phi) \ln \bar{H} + \frac{(1 - \phi)}{\bar{H}}(H_t - \bar{H})$$

## Steady-State

Im Steady-State gilt:

$$\ln \bar{Y} = \ln \bar{\lambda} + \phi \ln \bar{K} + (1 - \phi) \ln \bar{H}$$

## Substitution der Steady-State Terme

Die Steady-State Terme können demnach substituiert werden

$$\frac{1}{\bar{Y}}(Y_t - \bar{Y}) \approx \frac{1}{\bar{\lambda}}(\lambda_t - \bar{\lambda}) + \frac{\phi}{\bar{K}}(K_t - \bar{K}) + \frac{(1 - \phi)}{\bar{H}}(H_t - \bar{H})$$

## Vereinfachung

Nach Vereinfachung erhalten wir

$$\frac{Y_t}{\bar{Y}} + 1 \approx \frac{\lambda_t}{\bar{\lambda}} + \frac{\phi K_t}{\bar{K}} + \frac{(1 - H_t)}{\bar{H}}$$



## Log-Linearisierung

- Harald Uhlig (1999) empfiehlt eine einfachere Methode der Log-Linearisierung
- Diese Methode kommt ohne die Differentiation der Steady-State Variablen zum identischen Ergebnis der Basis-Methode
- Das linearisierte Modell wird jedoch in Log-Differenzen der Variablen ausgedrückt

## Allgemeines Beispiel

- Wir nehmen ein Set von Variablen  $X_t$  an, für welches  $\tilde{X}_t = \ln X_t - \ln \bar{X}$  gilt
- Variablen mit einer Tilde werden als Log-Differenzen der Originalvariablen mit der Steady-State Variablen definiert
- Es gilt:  $X_t = \bar{X}e^{\tilde{X}}$ , da

$$X_t = \bar{X}e^{\tilde{X}_t} = \bar{X}e^{\ln X_t - \ln \bar{X}} = \bar{X}e^{\ln \frac{X_t}{\bar{X}}} = \bar{X} \cdot X_t / \bar{X} = X_t$$

## Ausmultiplizieren

- Uhlig empfiehlt zuerst alle Variablen auszumultiplizieren, um möglichst viele Variablen aus dem Nenner zu entfernen
- Dann wird jede Variable durch das Äquivalent in der Form  $\bar{X}e^{\tilde{X}_t}$  ersetzt.
- Die Exponentialterme werden nun zusammengebracht, z.B.:

$$\frac{A_t B_t^\alpha}{C_t^\delta} = \frac{\bar{A} e^{\tilde{A}_t} \bar{B}^\alpha e^{\tilde{B}_t \alpha}}{C_t^\delta e^{\delta \tilde{C}_t}}$$

wird zu

$$\frac{\bar{A} \bar{B}^\alpha}{\bar{C}^\delta} e^{\tilde{A}_t + \alpha \tilde{B}_t - \delta \tilde{C}_t}$$

## Taylor Expansion

- Nun wird die Lineare Approximation der Variablen mit Tilde gebildet
- Die Taylor-Approximation des Exponentialterms um den Steady-State entspricht:

$$e^{\tilde{A}_t + \alpha \tilde{B}_t - \delta \tilde{C}_t} \approx e^{\tilde{A} + \alpha \tilde{B} - \delta \tilde{C}} + e^{\tilde{A} + \alpha \tilde{B} - \delta \tilde{C}} (\tilde{A}_t - \tilde{A})$$

$$+ \alpha e^{\tilde{A} + \alpha \tilde{B} - \delta \tilde{C}} (\tilde{B}_t - \tilde{B}) - \delta e^{\tilde{A} + \alpha \tilde{B} - \delta \tilde{C}} (\tilde{C}_t - \tilde{C}) = 1 + \tilde{A}_t + \alpha \tilde{B}_t + \delta \tilde{C}_t,$$

wobei Terme ohne Zeitindizes die Steady-State Werte der Tilde-Variablen bezeichnen. Es kann üblicherweise angenommen werden, dass die Steady-State Werte der Differenzen Null sind.

## Vereinfachung

In diesem Fall vereinfacht sich die Funktion zu

$$\frac{\bar{A}\bar{B}^\alpha}{\bar{C}^\delta} \left( 1 + \tilde{A}_t + \alpha\tilde{B}_t - \delta\tilde{C}_t \right)$$

# Die Cobb-Douglas Funktion

Die Cobb-Douglas Funktion lautet

$$Y_t = \lambda_t K_t^\phi H_t^{1-\phi}$$

Nun substituieren wir  $\bar{X}e^{\tilde{X}_t}$  für jede Variable

$$\bar{Y}e^{\tilde{Y}_t} = \bar{\lambda}\bar{K}^\phi\bar{H}^{1-\phi}e^{\tilde{\lambda}_t+\phi\tilde{K}_t+(1-\phi)\tilde{H}_t}$$

## Taylor Expansion

Wir approximieren nun die Funktion mit der Taylor Approximation

$$\bar{Y}(1 + \tilde{Y}_t) = \bar{\lambda}\bar{K}^\phi\bar{H}^{(1-\phi)}(1 + \tilde{\lambda}_t + \phi\tilde{K}_t + (1 - \phi)\tilde{H}_t)$$

Durch die Steady-State Definition  $\bar{Y} = \bar{\lambda}\bar{K}^\phi\bar{H}^{(1-\phi)}$  erhalten wir

$$\tilde{Y}_t = \tilde{\lambda}_t + \phi\tilde{K}_t + (1 - \phi)\tilde{H}_t$$

## Vergleich mit der direkten Log-Linearisierung

Das Ergebnis der direkten Log-Linearisierung war

$$\frac{Y_t}{\bar{Y}} + 1 \approx \frac{\lambda_t}{\bar{\lambda}} + \frac{\phi K_t}{\bar{K}} + \frac{(1 - H_t)}{\bar{H}}$$

Wir substituieren nun jede Variable  $X_t$  mit  $X_t \approx \bar{X}(1 + \tilde{X}_t)$

$$\frac{\bar{Y}(1 + \tilde{Y}_t)}{\bar{Y}} + 1 \approx \frac{\bar{\lambda}(1 + \tilde{\lambda}_t)}{\bar{\lambda}} + \frac{\phi \bar{K}(1 + \tilde{K}_t)}{\bar{K}} + \frac{(1 - \phi)\bar{H}(1 + \tilde{H}_t)}{\bar{H}}$$

und dies kann vereinfacht werden zu

$$\tilde{Y}_t = \tilde{\lambda}_t + \phi \tilde{K}_t + (1 - \phi)\tilde{H}_t$$



## Uhlig's Definitionen

Die Definitionen von Uhlig lauten

$$\tilde{X}_t = \ln X_t - \ln \bar{X}$$

und

$$X_t = \bar{X} e^{\tilde{X}_t}$$

## Uhlig's Regeln

Uhlig's Regeln lauten:

$$e^{\tilde{X}_t + a\tilde{Y}_t} \approx 1 + \tilde{X}_t + a\tilde{Y}_t,$$

$$\tilde{X}_t \tilde{Y}_t \approx 0,$$

$$E_t \left[ a e^{\tilde{X}_{t+1}} \right] \approx a + a E_t \left[ \tilde{X}_{t+1} \right].$$

## Anwendung

- Die erste Regel ist die direkteste und sollte vor allen anderen angewandt werden
- Die zweite Regel ist dann üblicherweise nicht notwendig
- Eine nützliche Version der Erwartungsregel lautet

$$E_t [X_{t+1}] = \bar{X}(1 + E [\tilde{X}_{t+1}])$$

## Bewertung

- Der Vorteil von Uhlig's Methode liegt in dem Verzicht auf Ableitungen
- Die Substitutionen sind meist direkt und mechanisch
- Es gibt einige Regeln, die die Anwendung erleichtern
- Dennoch muss beachtet werden, dass die Variablen als Log-Differenzen des Steady-States vorliegen

# Lösung des Hansen Modells

- Ableitung der Modellgleichungen
- Log-Linearisierung
- Lösung mit Hilfe der Tensoralgebra

## Die Modellgleichungen

Die Modellgleichungen des Hansen Modells lauten

$$1 = \beta E_t \left[ \frac{C_t}{C_{t+1}} (r_{t+1} + (1 - \delta)) \right]$$

$$AC_t = (1 - H_t)(1 - \phi) \frac{Y_t}{H_t}$$

## Restriktionen

Die Restriktionen lauten

$$C_t = Y_t + (1 - \delta)K_t - K_{t+1}$$

$$Y_t = \lambda_t K_t^\phi H_t^{(1-\phi)}$$

$$r_t = \phi \frac{Y_t}{K_t}$$

## Substitution

Wir substituieren nun jede Variable mit ihren Log-Differenzen

$$\begin{aligned} 1 &= \beta E_t \left[ \frac{\bar{c} e^{\tilde{c}_t}}{\bar{c} e^{\tilde{c}_{t+1}}} \bar{r} e^{\tilde{r}_{t+1}} + (1 - \delta) \frac{\bar{c} e^{\tilde{c}_t}}{\bar{c} e^{\tilde{c}_{t+1}}} \right] \\ &= \beta E_t \left[ \bar{r} e^{\tilde{c}_t - \tilde{c}_{t+1} + \tilde{r}_{t+1}} + (1 - \delta) e^{\tilde{c}_t - \tilde{c}_{t+1}} \right] \end{aligned}$$

$$\approx \beta (\bar{r} E_t [1 + \tilde{c}_t - \tilde{c}_{t+1} + \tilde{r}_{t+1}] + (1 - \delta) E_t [1 + \tilde{c}_t - \tilde{c}_{t+1}])$$



## Vereinfachung

$$= E_t \left[ 1 + \tilde{C}_t - \tilde{C}_{t+1} + \beta \bar{r} \tilde{r}_{t+1} \right]$$

oder da im Steady-State  $1/\beta = \bar{r}(1 - \delta)$

$$0 \approx \tilde{C}_t - E_t \tilde{C}_{t+1} + \beta \bar{r} E_t \tilde{r}_{t+1}$$

## Log-Linearisierung zweite Bed. 1. Ordnung

Nach Anwendung der Log-Linearisierung auf die zweite Bedingung 1. Ordnung erhält man

$$0 \approx \tilde{Y}_t - \frac{\tilde{H}_t}{1 - \bar{H}} - \tilde{C}_t$$

## Die Restriktionen

Die Restriktionen lauten entsprechend

$$0 \approx \bar{Y} \tilde{Y}_t - \bar{C} \tilde{C}_t + \bar{K} \left[ (1 - \delta) \tilde{K}_t - \tilde{K}_{t+1} \right],$$

$$0 \approx \tilde{\lambda}_t + \phi \tilde{K}_t + (1 - \phi) \tilde{H}_t - \tilde{Y}_t$$

und

$$0 \approx \tilde{Y}_t - \tilde{K}_t - \tilde{r}_t$$

mit  $\bar{r} = \phi \bar{Y} / \bar{K}$ .

## Der stochastische Prozess

Der stochastische Prozess

$$\lambda_{t+1} = \mu\lambda_t + \epsilon_{t+1}$$

kann ausgedrückt werden als

$$\bar{\lambda}e^{\tilde{\lambda}_{t+1}} = \mu\bar{\lambda}e^{\tilde{\lambda}_t} + \epsilon_{t+1}$$

## Approximation

Diese Funktion kann folgendermaßen approximiert werden

$$\bar{\lambda}(1 + \tilde{\lambda}_{t+1}) = \mu\bar{\lambda}(1 + \tilde{\lambda}_t) + \epsilon_{t+1}$$

oder

$$\tilde{\lambda}_{t+1} = \mu\tilde{\lambda}_t + \zeta_{t+1},$$

mit  $\bar{\lambda} = 1$  und  $\zeta_{t+1} = \epsilon_{t+1} - (1 - \mu)$ . Durch die Umformung ist  $E_t[\zeta_{t+1}] = 0$ .

# Vektor

Wir definieren den Vektor endogener Variablen als

$$x_t = [\tilde{K}_{t+1} \quad \tilde{Y}_t \quad \tilde{C}_t \quad \tilde{H}_t \quad \tilde{r}_t]'$$

und den der exogenen stochastischen Variablen als

$$z_t = \tilde{\lambda}_t$$

## Matrix

Das Modell kann in Matrixform folgendermaßen geschrieben werden

$$0 = E_t [F_{X_{t+1}} + G_{X_t} + H_{X_{t-1}} + L_{Z_{t+1}} + M_{Z_t}]$$

## F-Matrix

Die  $F$ -Matrix lautet:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & \beta \bar{r} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$



## G-Matrix

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{1-H} & 0 \\ -\bar{K} & \bar{Y} & -\bar{C} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1-\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

## H,L,M Matrix und stochastischer Prozess

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{K}(1-\delta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$L = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]'$$

$$M = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]'$$

## Stochastischer Prozess

Mit dem stochastischen Prozess als

$$z_{t+1} = Nz_t + \zeta_{t+1},$$

mit  $E_t[\zeta_{t+1}] = 0$ . In diesem Fall ist  $N$  eine 1-Element Matrix mit  $N = [\mu]$ .

## Lösungsmatrizen

Die Lösungsmatrizen  $P$  und  $Q$  geben die gleichgewichtigen Bewegungsgleichungen an

$$x_t = Px_{t-1} + Qz_t,$$

wobei das Gleichgewicht, welches durch diesen Prozess beschrieben wird, stabil ist.

# Theorem 1

Nach Theorem 1 in Uhlig (1999) kann die Lösung der Matrix  $P$ , falls sie existiert, über die Lösung der quadratischen Matrixgleichung

$$0 = FP^2 + GP + H$$

gelöst werden.

## Q-Matrix

Die Matrix  $Q$  kommt hierbei von

$$V\text{vec}(Q) = -\text{vec}(LN + M),$$

wobei  $\text{vec}(\cdot)$  für spaltenweise vektorisiert steht, zugleich gilt:

$$V = N' \otimes F + I_k \otimes (FP + G)$$

mit  $I_k$  als der  $k$ -dimensionalen Einheitsmatrix,  $k$  der Zahl an stochastischen Variablen (Dimension von  $z_t$ ) und  $\otimes$  entspricht dem Kronecker Produkt.

## Einsetzen

Die Lösung kann gefunden werden, indem man

$$x_t = Px_{t-1} + Qz_t$$

und den stochastischen Prozess der Erwartungen

$$E_t z_{t+1} = Nz_t$$

in die Gleichung

$$0 = E_t [F_{x_{t+1}} + G_{x_t} + H_{x_{t-1}} + L_{z_{t+1}} + M_{z_t}]$$

substituiert.

## Einsetzen

Hierdurch erhalten wir den Ausdruck

$$0 = [FP^2 + GP + H] x_{t-1} + [FPQ + FQN + GQ + LN + M] z_t$$



## Bewertung

Damit diese Gleichung für alle Werte von  $x_{t-1}$  und  $z_t$  gilt, müssen die beiden Ausdrücke in eckiger Klammer Null sein. Die *vec* und Konecker Notationen sind notwendig, um den Ausdruck für  $Q$  zu lösen.

# Lösung des Hansen Modells

- Basismethode
  - Jump-Variablen
- Blanchard-Kahn
- Lineare Programmierung (später)

## Teilung der endogenen Variablen

- Wir können die endogenen Variablen

$$x_t = \left[ \tilde{K}_{t+1} \quad \tilde{Y}_t \quad \tilde{C}_t \quad \tilde{H}_t \quad \tilde{r}_t \right]'$$

in zwei Gruppen einteilen:

- Endogene Zustandsvariablen (eigentlich Kontrollvariablen)

$$x_t = \left[ \tilde{K}_{t+1} \right]$$

- Endogene von den Werten der Zustandsvariable abhängige

$$\text{Variablen } y_t = \left[ \tilde{Y}_t, \tilde{C}_t, \tilde{H}_t, \tilde{r}_t \right]'$$

## Trennung

Wir trennen nun Gleichungen mit und ohne Erwartungsparameter:

$$0 = Ax_t + Bx_{t-1} + Cy_t + Dz_t$$

$$0 = E_t [Fx_{t+1} + Gx_t + Hx_{t-1} + Jy_{t+1} + Ky_t + Lz_{t+1} + Mz_t]$$

$$z_t = Nz_t + \epsilon_{t+1}$$

$$E_t(\epsilon_{t+1}) = 0$$

## Das Hansen Modell

Das Hansen Modell lautet entsprechend:

$$A = [ 0 \quad -\bar{K} \quad 0 \quad 0 ]',$$

$$B = [ 0 \quad (1 - \delta)\bar{K} \quad \phi \quad -1 ]',$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{1-H} & 0 \\ \bar{Y} & -\bar{C} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 - \phi & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

## Hansen Modell II

$$D = [ 0 \ 0 \ 1 \ 0 ]',$$

$$F = [0], G = [0], H = [0],$$

$$J = [ 0 \ -1 \ 0 \ \beta \bar{r} ],$$

$$K = [ 0 \ 1 \ 0 \ 0 ],$$

$$L = [0], M = [0], N = [\mu].$$

## Aufteilung der Modellgleichungen

Die Kunst in der Aufteilung der Gleichungen liegt in der Reduktion der Dimension der Erwartungsgleichung. Falls möglich, sollte Matrix  $C$  invertierbar sein und linear unabhängige Vektoren aufweisen.

## Bewegungsgleichungen

Die gesuchten Bewegungsgleichungen haben die Form

$$x_t = Px_{t-1} + Qz_t$$

$$y_t = Rx_{t-1} + Sz_t$$



## Das Problem

- Wir müssen Werte für die Matrizen  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  und  $S$  finden
- Wir beginnen, indem wir die Bewegungsgleichungen in die Modellgleichungen substituieren
- Wir reduzieren die Gleichungen zu einer, in der lediglich die Variablen  $x_{t-1}$  und  $z_t$  auftauchen
- Wir verwenden den stochastischen Prozess, um  $z_{t+1}$  durch  $Nz_t + \epsilon_{t+1}$  zu ersetzen
- Hinweis: Wenn wir Erwartungen bilden, verschwindet der Fehlerterm

## Substitution

Nach der Substitution der Bewegungsgleichungen lauten die beiden Modellgleichungen

$$0 = [AP + B + CR] x_{t-1} + [AQ + CS + D] z_t$$

und

$$0 = [FPP + GP + H + JRP + KR] x_{t-1} \\ + [FPQ + FQN + GQ + JRQ + JSN + KS + LN + M] z_t$$

## Initialbedingungen

- Für jede Initialbedingung  $x_{t-1}$  und jeden beliebigen Schock  $z_t$  müssen die beiden Gleichungen Null sein
- Da Schocks der Periode  $t$  unabhängig von den Variablenwerten in  $t - 1$  sind, müssen die Ausdrücke in den Klammern jeweils Null sein
- Daher kommen wir zu vier Gleichungen

## Gleichungen

Um die vier gesuchten Matrizen zu finden, haben wir vier Gleichungen.

$$0 = AP + B + CR$$

$$0 = AQ + CS + D$$

von der ersten Modellgleichung und weitere zwei

$$0 = FP^2 + GP + H + JRP + KR$$

$$0 = FPQ + FQN + GQ + JRQ + JSN + KS + LN + M$$

von der zweiten Modellgleichung.

## R-Matrix

Wir lösen die erste Gleichung nach  $R$

$$R = -C^{-1} [AP + B]$$

und die zweite nach  $S$

$$S = -C^{-1} [AQ + D]$$

## Substitution

Wir substituieren nun  $R$  in die dritte Gleichung

$$0 = FP^2 + GP + H - J [C^{-1} [AP + B]] P - K [C^{-1} [AP + B]] .$$

Diese Gleichung kann durch Matrixalgebra in die quadratische  
Matrizengleichung gebracht werden:

$$0 = [F - JC^{-1}A] P^2 - [JC^{-1}B - G + KC^{-1}A] P - KC^{-1}B + H$$

## P-Matrix

- Die  $P$ -Matrix erhalten wir durch Lösung der quadratischen Matrixgleichung
- Wenn wir  $P$  gefunden haben, können wir die Matrix  $R$  berechnen

## Substitution

In die vierte Gleichung wird nun  $S$  substituiert

$$0 = FPQ + FQN + GQ + JRQ - J [C^{-1}(AQ + D)] N \\ - K [C^{-1}(AQ + D)] + LN + M.$$

Dies kann vereinfacht werden zu

$$[(F - JC^{-1}A) Q] N + [FP + G + JR - KC^{-1}A] Q \\ = [JC^{-1}D - L] N + KC^{-1}D - M$$



## Q-Matrix

- Die  $Q$ -Matrix lässt sich jedoch nicht durch einfache Matrizenmanipulation als lineare Funktion der anderen Matrizen ausdrücken
- Hierzu müssen wir uns der Tensor Algebra bedienen

## Theorem 1

$A$ ,  $B$  und  $C$  seien Matrizen, deren Dimensionen das Matrizenprodukt  $ABC$  erlauben:

$$\text{vec}(ABC) = (C' \otimes A) \cdot \text{vec}(B)$$

Der Operator  $\text{vec}(X)$  einer Matrix  $X$  resultiert aus der spaltenweisen Vektorisierung

$$\text{vec} \left( \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}$$

## Kronecker Produkt

Das Kronecker Produkt ist für den Fall einer  $2 \times 2$  ( $A$ ) und einer  $3 \times 2$  ( $B$ ) Matrix definiert als

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{11}b_{31} & a_{11}b_{32} & a_{12}b_{31} & a_{12}b_{32} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \\ a_{21}b_{31} & a_{21}b_{32} & a_{22}b_{31} & a_{22}b_{32} \end{bmatrix}$$

## Folgesatz

Ein nützlicher Folgesatz dieser Regel basiert auf einem Spezialfall:  $B$  weist die Dimension  $n \times r$  auf und  $C$  ist eine Einheitsmatrix  $I_n$  der Dimension  $n$ . Der Folgesatz lautet:

$$\text{vec}(AB) = (I_n \otimes A)\text{vec}(B)$$

Hierbei wurde  $C$  durch die Einheitsmatrix ersetzt.

## Umformulierung

Unter Verwendung des Folgesatzes und des Theorems kann

$$[(F - JC^{-1}A) Q] N$$

umgeschrieben werden zu

$$\text{vec}([(F - JC^{-1}A) Q] N) = (N' \otimes (F - JC^{-1}A)) \text{vec}(Q)$$

## Umformulierung

und  $\left( \left( [FP + G + JR - KC^{-1}A] \right) Q \right)$  zu

$$\text{vec} \left( \left( [FP + G + JR - KC^{-1}A] \right) Q \right)$$

$$= (I_k \otimes (FP + G + JR - KC^{-1}A)) Q,$$

wobei  $k$  der Spaltenanzahl der Matrix  $Q$  entspricht.

## Lösung nach $\text{vec}(Q)$

Wir lösen das System

$$\begin{aligned} [(F - JC^{-1}A) Q] N + [FP + G + JR - KC^{-1}A] Q \\ = [JC^{-1}D - L] N + KC^{-1}D - M \end{aligned}$$

nun nach  $\text{vec}(Q)$

## Lösung

Wir verwenden hierzu den  $\text{vec}$  Operator auf beiden Seiten der Gleichung:

$$(N' \otimes (F - JC^{-1}A) + I_k \otimes (FP + G + JR - KC^{-1}A))^{-1} \\ \times \text{vec}((JC^{-1}D - L)N + KC^{-1}D - M)$$

Sobald  $Q$  definiert ist, lautet die Lösung für Matrix  $S$

$$S = -C^{-1} [AQ + D]$$



# Lösung

- Die Lösung des Systems ist in diesem Fall recht einfach
- Die Matrix  $P$  besteht aus einem Element

## Kalibrierung des Modells

- Um die Bewegungsgleichungen numerisch zu lösen, müssen wir die Parameter des Modells kennen
- Weiterhin müssen wir die Steady-State Werte der Variablen bestimmen
- $\phi$  ist, bei gegebener Cobb-Douglas Technologie, der Anteil am BIP, der auf den Faktor Kapital entfällt und daher leicht zu bestimmen
- $\beta$  (Diskontfaktor) und  $\delta$  (Abschreibungsrate) wurden in verschiedenen mikroökonomischen Studien ermittelt
- $A$  (Konstante),  $\mu$  (AR(1)-Koeff.) und  $\zeta_{t+1}$  (Störterm) sind hingegen offen und müssen bestimmt werden:
  - diese Parameterwerte werden kalibriert
  - sie werden so gewählt, dass die beobachtbaren Variablen den beobachteten Werten entsprechen

## Kalibrierung des Hansen Modells

- Das Hansen Modell wird auf Quartalsdaten kalibriert
- $\beta = .99$ ,  $\delta = .025$ ,  $\phi = .36$
- Die Gleichungen für den Steady-State lauten:

$$\bar{H} = \frac{1}{1 + \frac{A}{(1-\phi)} \left[ 1 - \frac{\beta\delta\phi}{1-\beta(1-\delta)} \right]}$$

und

$$\bar{K} = \bar{H} \left[ \frac{\phi\bar{\lambda}}{\frac{1}{\beta} - (1-\delta)} \right]^{\frac{1}{1-\phi}}$$

## Weitere Parameter

- Der stochastische Technologieprozess wurde so gewählt, dass  $\bar{\lambda} = 1$  ist.
- Hansen wählte für  $A = 2$  und erhielt für  $\bar{H} = 1/3$
- Bei Berücksichtigung der Parameterwahl gilt für  $\bar{H} = 1/3$  in unserem Fall  $A = 1.72$

## Die Bestimmung des Parameters $\mu$

Der Parameter  $\mu$  wird durch Schätzung folgender Funktion bestimmt

$$\ln \lambda_t = \ln Y_t - \phi \ln K_t - (1 - \phi)H_t$$

Unter Verwendung von Daten für die Vereinigten Staaten ist der erste AR-Koeffizient der Serie  $[\lambda_t]$  :  $\mu = .95$

## Verteilung

- Die Bestimmung der Verteilungsfunktion von  $\zeta_{t+1}$  ist komplizierter
- Üblicherweise wird die Verteilung so gewählt, dass die modellsimulierte GDP-Zeitreihe den “realen” Daten entspricht
- Dies ist jedoch erst nach Berechnung der Bewegungsgleichungen möglich

## Berechnung von $\bar{K}$

$$\bar{K} = \bar{H} \left[ \frac{\phi \bar{\lambda}}{\frac{1}{\beta} - (1 - \delta)} \right]^{\frac{1}{1-\phi}}$$

$$\bar{K} = .3335 \left[ \frac{.36}{\frac{1}{.99} - (1 - .025)} \right]^{\frac{1}{1-.36}} = 12.6695$$

## Berechnung von $\bar{Y}$

Die Berechnung von  $\bar{Y}$  basiert auf der Steady-State Produktionsfunktion

$$\bar{Y} = \bar{K}^\phi \bar{H}^{(1-\phi)} = (12.6695)^{.36} (.3335)^{.64} = 1.2353$$



## Berechnung von $\bar{C}$

Der Steady-State Konsum wird über die Steady-State Budgetrestriktion berechnet

$$\bar{Y} + (1 - \delta)\bar{K} = \bar{C} + \bar{K}$$

$$\bar{C} = \bar{Y} - \delta\bar{K} = 1.2353 - 0.25 \times 12.6695 = 0.9186$$

## Berechnung von $\bar{r}$

- Nachdem die anderen Steady-State Parameter berechnet wurden, kann über die Steady-State Euler-Gleichung  $\bar{r}$  berechnet werden

$$\frac{1}{\beta} = \bar{r} + (1 - \delta) = \phi \frac{\bar{Y}}{\bar{K}} + (1 - \delta)$$

$$\bar{r} = \frac{1}{\beta} - (1 - \delta) = \frac{1}{.99} - 1 + .025 = 0.0351$$

und

$$\bar{r} = \phi \frac{\bar{Y}}{\bar{K}} = .36 \times \frac{1.2353}{12.6695} = 0.0351$$

## A, B,... N Matrix

- Die Werte werden nun in die A bis N Matrizen eingefügt:

$$A = [ 0 \quad -12.6698 \quad 0 \quad 0 ]',$$

$$B = [ 0 \quad 12.3530 \quad .36 \quad -1 ]',$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1.5004 & 0 \\ 1.2353 & -0.9186 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & .64 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

## A, B,... N Matrix

$$D = [ 0 \ 0 \ 1 \ 0 ]'$$

$$F = [0], G = [0], H = [0],$$

$$J = [ 0 \ -1 \ 0 \ .0348 ],$$

$$K = [ 0 \ 1 \ 0 \ 0 ],$$

$$L = [0], M = [0], N = [.95].$$

## Quadratische Matrixgleichung

Wir verwenden nun diese Werte, um jene Matrix  $P$  zu suchen, die die quadratische Matrixgleichung löst:

$$0 = 7.0734 \cdot P^2 - 14.2376 \cdot P + 7.1448$$

Die Lösung ist

$$P = 1.0592$$

und

$$P = 0.9537$$

Nur letzterer Wert bedingt ein stabiles Gleichgewicht mit  $P < 1$

## Berechnung von $Q$ , $R$ und $S$

Unter Verwendung von  $P$  können wir nun  $Q$  ausrechnen:  
 $Q = 0.1132$ . Die Matrizen  $R$  und  $S$  lauten:

$$R = \begin{bmatrix} 0.2045 & 0.5691 & -0.2430 & -0.7955 \end{bmatrix}'$$

$$S = \begin{bmatrix} 1.4523 & 0.3920 & 0.7067 & 1.4523 \end{bmatrix}'$$

## Die Bewegungsgleichungen

Die fünf Bewegungsgleichungen um des Steady-State lauten entsprechend:

$$\tilde{K}_{t+1} = 0.9537\tilde{K}_t + 0.1132\tilde{\lambda}_t$$

$$\tilde{Y}_t = 0.2045\tilde{K}_t + 0.3920\tilde{\lambda}_t$$

$$\tilde{C}_t = 0.5691\tilde{K}_t + 0.3920\tilde{\lambda}_t$$

$$\tilde{H}_t = -0.2430\tilde{K}_t + 0.7067\tilde{\lambda}_t$$

$$\tilde{r}_t = -0.7955\tilde{K}_t + 1.4523\tilde{\lambda}_t$$

## Standardabweichung

- Hansen berechnet eine Standardabweichung des GDPs (1955:3 - 1984:1) von 1.76 Prozent
- In unserem Modell verwenden wir Log-Differenzen  $\tilde{Y}_t = \ln Y_t - \ln \bar{Y}$ , daher ist die Standardabweichung von  $\tilde{Y}_t = .0176$



## Bewegungsgleichungen

Wir verwenden zwei Bewegungsgleichungen:

$$\tilde{K}_{t+1} = a\tilde{K}_t + b\tilde{\lambda}_t$$

$$\tilde{Y}_t = c\tilde{K}_t + d\tilde{\lambda}_t$$

sowie einen Technologieschock von

$$\tilde{\lambda}_t = \mu\tilde{\lambda}_{t-1} + \epsilon_t$$

## Berechnung der Standardabweichung für $\tilde{Y}_t$

- Wir möchten die Standardabweichung von  $\tilde{Y}_t$  als Funktion des Fehlerterms  $\epsilon_t$  berechnen
- Das bedeutet, dass wir die Standardabweichung von  $\epsilon_t$ ,  $\sigma_\epsilon$ , so wählen müssen, dass dies eine Standardabweichung für  $\tilde{Y}_t$  von .0176 ergibt
- Hierzu müssen wir die aus den Bewegungsgleichungen ermittelten Werte für  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  und  $\mu$  verwenden

## Substitution I

Wir beginnen mit der Bewegungsgleichung für Kapital und substituieren den Technologieprozess

$$\tilde{K}_{t+1} = a\tilde{K}_t + b\mu\tilde{\lambda}_{t-1} + b\epsilon_t$$

## Substitution II

Wir substituieren nun Bewegungsgleichungen der Vorperiode in diesen Term, um den Kapitalstock als Funktion von Schocks zu ermitteln

$$\tilde{K}_{t+1} = b \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i a^i \mu^{i-j} \epsilon_{t-i}$$

Hierbei berücksichtigen wir, dass das Technologieniveau ausgedrückt werden kann als

$$\tilde{\lambda}_t = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \epsilon_{t-i}$$

## Bewegungsgleichung des Outputs

Die Substitutionen für Technologieniveau und Kapitalstock können nun in die Bewegungsgleichung für den Output eingesetzt werden

$$\tilde{Y}_t = d\epsilon_t + \sum_{i=0}^{\infty} \left[ cb \sum_{j=0}^i a^j \mu^{i-j} + d\mu^{i+1} \right] \epsilon_{t-1-i}$$

## Varianz des Outputs

Falls die Technologieschocks unabhängig voneinander sind, ist die Varianz des Outputs

$$\text{var } \tilde{Y}_t = \left( d^2 + \sum_{i=0}^{\infty} \left[ cb \sum_{j=0}^i a^j \mu^{i-j} + d\mu^{i+1} \right]^2 \right) \text{var } \epsilon_t$$

## Lösung

- Die Gleichung, insbesondere der Ausdruck in der Klammer, ist schwer zu lösen
- Da die Sequenz jedoch konvergiert, kann sie mit beliebiger Genauigkeit approximiert werden
- Die Gleichung kann verwendet werden, um die Standardabweichung zu berechnen

## Standardabweichung

Der Standardabweichung für die Investitionen lässt sich wie folgt berechnen

$$\bar{\tilde{I}}_t = \bar{Y} \tilde{Y}_t - \bar{C} \tilde{C}_t$$

und ergibt eine Bewegungsgleichung der Form

$$\tilde{I}_t = \hat{c} \tilde{K}_t + \hat{d} \tilde{\lambda}_t$$



## Standardabweichung II

mit

$$\hat{c} = .2045 \frac{\bar{Y}}{\bar{I}} - .5691 \frac{\bar{C}}{\bar{I}} = -.8530$$

und

$$\hat{d} = 1.4523 \frac{\bar{Y}}{\bar{I}} - 0.3920 \frac{\bar{C}}{\bar{I}} = 4.5277$$

## Bewertung

- Der Standardabweichung der Technologie müsste nach Hansen in dem Intervall  $[0.007, 0.1]$  liegen
- Der gefundene Standardabweichung ist weit geringer
- Das Hansen Modell kann weiterhin die Standardabweichung des Konsums, der Arbeitsstunden und der Investitionen nicht replizieren

## Der stationäre Zustand

- Für den stationären Zustand gilt  $\bar{X} = X_t = X_{t+1}$  für alle  $t$  und jede Variable  $\bar{X}$ , bei gegebenen reellen Variablen
- Der stationäre Zustand des Technologieprozesses ist  $\bar{\lambda} = 1$

## Bedingung 1 Ordnung

Die Bedingungen erster Ordnung lauten

$$\frac{1}{\beta} = \bar{r} + (1 - \delta)$$

und

$$\bar{c} = -\frac{(1 - \phi)\bar{Y}}{B\bar{H}}$$

## Produktionsfunktion, Kapitalmarktgleichgewicht

Die Produktionsfunktion lautet

$$\bar{Y} = \bar{K}^{\phi} \bar{H}^{1-\phi}$$

das Gleichgewicht auf dem Kapitalmarkt bedingt

$$\bar{r} = \phi \bar{K}^{\phi-1} \bar{H}^{1-\phi}$$

## Die Budgetrestriktion

Die Budgetrestriktion im Steady-State lautet

$$\bar{C} = \bar{Y} - \delta \bar{K}$$

## Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichung der Arbeitsstunden lautet entsprechend

$$\bar{H} = - \frac{(1 - \phi)}{B \left( 1 - \frac{\beta \phi \delta}{1 - \beta(1 - \delta)} \right)}$$

## Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichung des Kapitalstocks lautet

$$\bar{K} = \left[ \frac{\phi\beta}{1 - \beta(1 - \delta)} \right]$$



## Bewegungsgleichungen

- Im Modell mit unteilbarer Arbeit ist  $B$  eine Funktion der Arbeitsstunden
- Der Steady-State Arbeitseinsatz ist entsprechend  $\bar{H} = \alpha h_o$
- Wir wählen nun  $\alpha h_o$  so, dass  $\bar{H}$  den Wert des Basismodells ausweist
- Mit diesem Wert bedingt die Bewegungsgleichung für  $\bar{K}$  den identischen Kapitalstock in beiden Modellen
- Mit identischem Kapitalstock sind auch andere Gleichgewichtswerte  $\bar{Y}$ ,  $\bar{C}$  und  $\bar{T}$  identisch

## Identität

Wir setzen nun die beiden Gleichungen für  $\bar{H}$  im Basismodell und dem Modell mit unteilbarer Arbeit gleich

$$\bar{H} = \frac{1}{1 + \frac{A}{(1-\phi)} \left[ 1 - \frac{\beta\delta\phi}{1-\beta(1-\delta)} \right]} = - \frac{(1-\phi)}{\frac{A \ln(1-h_0)}{h_0} \left( 1 - \frac{\delta\beta\phi}{1-\beta(1-\delta)} \right)}$$

oder vereinfacht

$$\frac{h_0}{\ln(1-h_0)} = - \frac{\frac{A}{(1-\phi)} \left[ 1 - \frac{\beta\phi\delta}{1-\beta(1-\delta)} \right]}{1 + \frac{A}{(1-\phi)} \left[ 1 - \frac{\beta\delta\phi}{1-\beta(1-\delta)} \right]} = G$$

## Numerische Lösung

- Wir können nun die Parameterwerte des ersten Hansen Modells in die Gleichung einsetzen
- $G$  besitzt dann einen Wert von .6665,  $h_0$  besitzt an dieser Stelle den Wert .583 und  $\bar{\alpha} = \bar{H}/h_0$  von .572
- Für jene Haushalte die in  $t$  arbeiten ist  $h_t = .583$
- Die Wahrscheinlichkeit eines Haushaltes zu arbeiten liegt bei 57,2 Prozent

## Die log-lineare Version des Hansen Modells

Die log-lineare Version des Hansen Modells mit unteilbarer Arbeit lautet

$$0 \approx \tilde{C}_t - E_t \tilde{C}_{t+1} + \beta \bar{r} E_t \tilde{r}_{t+1}$$

$$0 \approx \tilde{C}_t + \tilde{H}_t - \tilde{Y}_t$$

$$0 \approx \bar{Y} \tilde{Y}_t - \bar{C} \tilde{C}_t + (1 - \delta) \bar{K} \tilde{K}_t - \bar{K} \tilde{K}_{t+1}$$

$$0 \approx \tilde{Y}_t - \tilde{\lambda}_t - \phi \tilde{K}_t - (1 - \phi) \tilde{H}_t$$

und

$$0 \approx \tilde{Y}_t - \tilde{K}_t - \tilde{r}_t$$

## Matrizenform

Wir schreiben das Modell in Matrizenform auf

$$0 = Ax_t + Bx_{t-1} + Cy_t + Dz_t$$

$$0 = E_t [Fx_{t+1} + Gx_t + Hx_{t-1} + Jy_{t+1} + Ky_t + Lz_{t+1} + Mz_t]$$

$$z_t = Nz_t + \epsilon_{t+1}$$

$$E_t(\epsilon_{t+1}) = 0$$

mit  $x_t = [\tilde{K}_{t+1}]$ ,  $y_t = [\tilde{Y}_t, \tilde{C}_t, \tilde{H}_t, \tilde{r}_t]$  und  $z_t = [\tilde{\lambda}_t]$ .

# Matrizen

$$A = [0 \quad -\bar{K} \quad 0 \quad 0]'$$

$$B = [0 \quad (1 - \delta)\bar{K} \quad \phi \quad -1]$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ \bar{Y} & -\bar{C} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 - \phi & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

## Matrizen II

$$D = [ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 ]'$$

$$F = [0], G = [0], H = [0]$$

$$J = [ 0 \quad -1 \quad 0 \quad \beta\bar{r} ]$$

$$K = [ 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 ]$$

$$L = [0], M = [0], N = [\mu]$$

## Lösung des Systems

Wie zuvor besteht die Lösung des Systems aus vier Matrizen, die die Bewegungsgleichungen beschreiben

$$x_t = Px_{t-1} + Qz_t$$

$$y_t = Rx_{t-1} + Sz_t$$

Wiederum ist in unserem Modell die Matrix C vollständig invertierbar



## Numerische Lösung

Wir lösen das Modell nun analog zum Basismodell

$$\tilde{K}_{t+1} = .9418\tilde{K}_t + .1552\lambda_t$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.05550 & 0.5316 & -0.4766 & -0.9450 \end{bmatrix}'$$

$$S = \begin{bmatrix} 1.9418 & 0.4703 & 1.4715 & 1.9417 \end{bmatrix}'$$

Nun können die Standardfehler analog zum Basismodell berechnet werden.

## Standardfehler

	$\tilde{Y}_t$	$\tilde{C}_t$	$\tilde{H}_t$	$\tilde{r}_t$	$\tilde{l}_t$
<i>Standardfehler</i>	$6.431\sigma_\epsilon$	$4.081\sigma_\epsilon$	$3.444\sigma_\epsilon$	$4.514\sigma_\epsilon$	$15.722\sigma_\epsilon$
<i>In % des Outputs</i>	100	63.46	53.55	70.19	244.5

## Beurteilung

- Die Standardfehler des Konsums, der Investitionen und der Arbeitsstunden ist noch immer zu niedrig
- Der Standardfehler der Investitionen ist “besser”, der Standardfehler des Konsums ist “schlechter” als im Basismodell
- Insgesamt ist der Standardfehler des Technologieschocks geringer als im Basismodell 0.0027
- Die Amplifikation des Modells ist jedoch höher, der Technologieschock der den Standardfehler des Outputs erklärt ist geringer als im Basismodell

# Impulse Response Funktionen

- Impulse Response Funktionen geben an, wie ein Modell auf einen Impuls einer der Schockterme reagiert
- Ausgangspunkt ist der Steady-State
- Der Impuls erfolgt üblicherweise einmalig

# Hansen Modell

- Der einzige Schockterm im Hansen Modell ist der Technologieschock

$$\tilde{\lambda}_t = \mu \tilde{\lambda}_{t-1} + \epsilon_t$$

mit dem Schockterm  $\epsilon_t$

## Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen bzw. Politikfunktionen lauten

$$\tilde{K}_{t+1} = P\tilde{K}_t + Q\tilde{\lambda}_t$$

und

$$y_t = R\tilde{K}_t + S\tilde{\lambda}_t$$

mit  $y_t = [ \tilde{Y}_t \quad \tilde{C}_t \quad \tilde{H}_t \quad \tilde{r}_t ]$



## Lösungsmethode nach Blanchard-Kahn

- Der bisher vorgestellte Lösungsweg des Hansen Modells beruht auf McCallum (1983), Christiano (2002) und Uhlig (1999)
- Die Methode nach Blanchard-Kahn orientiert sich stärker an den Ingenieurwissenschaften



## Das lineare Modell

Ein lineares Modell kann in state-space Form folgendermaßen geschrieben werden

$$B \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + G \epsilon_t$$

mit  $x_t$  als  $n$ -Vektor vordefinierter Variablen zum Zeitpunkt  $t$  und  $y_t$  als  $m$ -Vektor nicht vordefinierter Variablen zum Zeitpunkt  $t$ .  
 $E_t y_{t+1}$  ist wiederum ein  $m$ -Vektor der Erwartungen über nicht vordefinierte Variablen in  $t + 1$  und  $\epsilon_t$  ist ein  $k$ -Vektor der stochastischen Schocks.  $A$  und  $B$  sind  $((n + m) \times (n + m))$  Matrizen und  $G$  ist eine  $((n + m) \times k)$  Matrix.

# Variablen

- Der Unterschied zwischen vordefinierten und nicht vordefinierten Variablen liegt im Verhältnis zu den stochastischen Schocks begründet
  - Die Werte der vordefinierten Variablen in  $t + 1$  basieren nicht auf den Schocks der Periode  $t + 1$
  - Die Werte der nicht vordefinierten Variablen in  $t + 1$  basieren auf den Schocks der Periode  $t + 1$
- Folglich müssen Erwartungen bezüglich der Entwicklung der nicht vordefinierten Variablen gebildet werden

## Gleichungssystem

Das Gleichungssystem ist geordnet

- Gleichungen die Erwartungsterme beinhalten sind in der unteren Zeile der Matrizen

Falls die Matrix B invertierbar ist, so gilt für das Differenzialgleichungssystem 1. Ordnung

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} = AB^{-1} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + B^{-1} G \epsilon_t$$

# Dekomposition

- Die Matrix  $Z = B^{-1}A$  kann in  $Z = M\Lambda M^{-1}$  aufgespalten werden
  - hierbei ist  $\Lambda$  eine Matrix die die Eigenwerte der Matrix  $Z$  auf ihrer Diagonalen aufweist und  $M$  ist eine Matrix der reellen Eigenvektoren
  - Die Eigenwerte werden nun nach ihrer Größe auf der Diagonalen der Matrix  $\Lambda$  zu  $\bar{\Lambda}$  geordnet (abfallend vom größeren Wert zum kleineren)
  - Die zugehörigen Eigenvektoren bilden nun eine Matrix  $\bar{M}$

# Lösung

Die Lösung nach Blanchard Kahn bedingt nun, dass die Anzahl der Eigenwerten außerhalb des Einheitskreises (mit einem absoluten Wert größer als Eins) gleich der Anzahl der Erwartungsvariablen  $m$  ist.

# Lösung

Falls die Anzahl der Erwartungsgleichungen gleich der Anzahl der Eigenwerte außerhalb des Einheitskreises ist, können Gleichgewichtsbedingungen formuliert werden, die die Existenz einer stabilen Gleichgewichtslösung der ökonomischen Problems garantieren.

## Deterministisches Modell

Wir betrachten nun den deterministischen Teil des Modells und schreiben das Differenzensystem folgendermaßen

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} = \bar{M} \bar{\Lambda} \bar{M}^{-1} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$$

nun multiplizieren wir beide Seiten mit  $\bar{M}^{-1}$

$$\bar{M}^{-1} \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} = \bar{\Lambda} \bar{M}^{-1} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$$

wir partitionieren die Matrix  $\bar{M}^{-1}$  als

$$\bar{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{M}_{11} & \hat{M}_{12} \\ \hat{M}_{21} & \hat{M}_{22} \end{bmatrix}$$

## Matrix $\bar{\Lambda}$

und die Matrix  $\bar{\Lambda}$  als

$$\bar{\Lambda} = \begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_{11} & 0_{12} \\ 0_{21} & \bar{\Lambda}_{22} \end{bmatrix}$$

mit dem Element  $X_{11}$  als  $n \times n$  und dem Element  $X_{12}$  als  $n \times m$  Matrix. Das Element  $X_{21}$  ist eine  $m \times n$  und das Element  $X_{22}$  eine  $m \times m$  Matrix. Eine Matrix  $= 0_{ij}$  ist eine Matrix mit Nullen, die in ihrer Größe mit  $ij$  korrespondiert. Die Matrix  $\bar{\Lambda}_{11}$  ist eine Diagonalmatrix, die alle stabilen Eigenwerte des Modells enthält und die Matrix  $\bar{\Lambda}_{22}$  ist eine Diagonalmatrix, die alle instabilen Eigenwerte des Modells enthält.



## Matrixgleichungen

Unter Verwendung der Partitionierung des deterministischen Modells kann das Differentialsystem in Form von zwei Matrixgleichungen geschrieben werden

$$\left[ \hat{M}_{11}x_{t+1} + \hat{M}_{12}E_t y_{t+1} \right] = \bar{\Lambda}_{11} \left[ \hat{M}_{11}x_t + \hat{M}_{12}y_t \right]$$

und

$$\left[ \hat{M}_{21}x_{t+1} + \hat{M}_{22}E_t y_{t+1} \right] = \bar{\Lambda}_{22} \left[ \hat{M}_{21}x_t + \hat{M}_{22}y_t \right]$$

## Stabilität

Da alle Elemente der Diagonalmatrix  $\bar{\Lambda}_{22} > 0$  sind, ist das Modell bei  $[\hat{M}_{21}x_t + \hat{M}_{22}y_t] \neq 0$  instabil. Dies impliziert gleichermaßen, dass  $[\hat{M}_{21}x_{t+1} + \hat{M}_{22}E_t y_{t+1}]$  ebenfalls Null sein muss. Damit dies in jeder Periode gilt muss  $y_t = -(\hat{M}_{22})^{-1}(\hat{M}_{21})x_t$  sein.

## Substitution

Da das Modell deterministisch ist gilt

$$E_t y_{t+1} = y_{t+1} = -(\hat{M}_{22})^{-1}(\hat{M}_{21})x_{t+1}$$

und durch Einsetzen dieser Gleichungen ins  
Differentialgleichungssystem

$$x_{t+1} = \left[ \hat{M}_{11} - \hat{M}_{12}(\hat{M}_{22})^{-1}\hat{M}_{21} \right]^{-1} \bar{\Lambda}_{11} \left[ \hat{M}_{11} - \hat{M}_{12}(\hat{M}_{22})^{-1}\hat{M}_{21} \right] x_t$$

## Lösung bei stochastischen Schocks I/II

Die Lösung des Modells bei stochastischen Schocks unterscheidet sich etwas von der Lösung im deterministischen Fall

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} = AB^{-1} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + B^{-1}G[\epsilon_t]$$

Unter Verwendung der exakt selben Eigenvektoren-Eigenvektor Dekomposition wie im deterministischen Fall erhalten wir

$$\bar{M}^{-1} \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} = \bar{\Lambda} \bar{M}^{-1} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + \bar{M}^{-1} B^{-1} G[\epsilon_t]$$

## Lösung bei stochastischen Schocks II/II

oder

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \hat{M}_{11} & \hat{M}_{12} \\ \hat{M}_{21} & \hat{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_{11} & 0_{12} \\ 0_{21} & \bar{\Lambda}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}_{11} & \hat{M}_{12} \\ \hat{M}_{21} & \hat{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{G}_1 \\ \hat{G}_2 \end{bmatrix} [\epsilon_t] \end{aligned}$$

mit  $\begin{bmatrix} \hat{G}_1 \\ \hat{G}_2 \end{bmatrix} = \bar{M}^{-1} B^{-1} G [\epsilon_t]$ .  $\hat{G}_1$  ist hierbei eine  $k \times n$  und  $\hat{G}_2$  eine  $k \times m$  Matrix.

## 2. Partition

Die zweite Partition enthält instabile Eigenwerte außerhalb des Einheitskreises.

$$\left[ \hat{M}_{21}x_{t+1} + \hat{M}_{22}E_t y_{t+1} \right] = \bar{\Lambda}_{22} \left[ \hat{M}_{21}x_t + \hat{M}_{22}y_t \right] + \hat{G}_2 [\epsilon_t]$$

oder bei  $\lambda_t = \hat{M}_{21}x_t + \hat{M}_{22}y_t$  als

$$E_t \lambda_{t+1} = \bar{\Lambda}_{22} \lambda_t + \hat{G}_2 [\epsilon_t]$$

## Eigenwerte

Da die Eigenwerte in  $\bar{\Lambda}_{22}$  alle größer als Eins sind, kann diese Funktion nach Seargent (1979) intertemporal wie folgt gelöst werden

$$\lambda_t = - \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\Lambda}_{22}^{-i-1} \hat{G}_2 E_t [\epsilon_{t+i}]$$

Bei gegebenen Erwartungen über zukünftige Schocks kann der Gegenwartswert von  $\lambda_t$  über eine konvergierende Sequenz gefunden werden. Wenn wir die Erwartung zukünftiger Schock Null setzen folgt

$$\lambda_t = \bar{\Lambda}_{22}^{-1} \hat{G}_2 [\epsilon_t]$$

## Eigenwerte

oder, falls  $\lambda_t$  ausgeschrieben wird

$$\lambda_t = -\hat{M}_{22}^{-1} \hat{M}_{21} x_t + \hat{M}_{22}^{-1} \bar{\Lambda}_{22}^{-1} \hat{G}_2 [\epsilon_t]$$



## Bewertung

- Der Koeffizient für  $x_t$  ist identisch zum deterministischen Fall
- Hinzu kommt ein komplexer Schockterm

## Variablen in $t + 1$

Die Variablen in  $t + 1$  werden analog gefunden, indem wir die Gleichung für  $y_t$  und  $E_t y_{t+1} = -\hat{M}_{22}^{-1} \hat{M}_{21}^{-1} x_{t+1}$  für den Erwartungswert von  $y_{t+1}$ . Wir verwenden nun die stabile Partition und erhalten

$$x_{t+1} = \left[ \hat{M}_{11} - \hat{M}_{12}(\hat{M}_{22})^{-1} \hat{M}_{21} \right]^{-1} \bar{\Lambda}_{11} \left[ \hat{M}_{11} - \hat{M}_{12}(\hat{M}_{22})^{-1} \hat{M}_{21} \right] x_t \\ - \left[ \hat{M}_{11} - \hat{M}_{12}(\hat{M}_{22})^{-1} \hat{M}_{21} \right]^{-1} \left[ \bar{\Lambda}_{11} \hat{M}_{12} \hat{M}_{22}^{-1} \bar{\Lambda}_{22}^{-1} \hat{G}_2 - \hat{G}_1 \right] [\epsilon_t]$$

## Log-Lineare Version des Modells

Die log-lineare Version des Hansen Modells mit unteilbarer Arbeit lautet

$$\bar{K} \tilde{K}_{t+1} = \bar{Y} \tilde{Y}_t - \bar{C} \tilde{C}_t + (1 - \delta) \bar{K} \tilde{K}_t$$

$$\tilde{\lambda}_t = \mu \tilde{\lambda}_{t-1} + \epsilon_t$$

$$0 \approx \tilde{\lambda}_t - \phi \tilde{Y}_t + \phi \tilde{K}_t - (1 - \phi) \tilde{C}_t$$

$$0 = \tilde{Y}_t - \tilde{K}_t - \tilde{r}_t$$

$$E_t \tilde{C}_{t+1} - \beta \bar{r} E_t \tilde{r}_{t+1} = \tilde{C}_t$$

hierbei wurde  $\tilde{H}_t$  substituiert.

## Vektor der Variablen in $t + 1$

Der Vektor der Variablen in  $t + 1$  lautet

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{t+1} \\ \tilde{\lambda}_t \\ \tilde{Y}_t \\ E_t \tilde{C}_{t+1} \\ E_t \tilde{r}_{t+1} \end{bmatrix},$$

mit den vordefinierten Variablen  $\tilde{K}_{t+1}$ ,  $\tilde{\lambda}_t$  und  $\tilde{Y}_t$  und den jump (nicht-vordefinierten) Variablen  $\tilde{r}_t$  und  $\tilde{C}_t$ .

## Das Modell in state-space Form

Das Modell lautet in state-space Form

$$B \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + G [\epsilon_t]$$

## B-Matrix

$$B = \begin{bmatrix} \bar{K} & 0 & -\bar{Y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\bar{r}\beta \end{bmatrix}$$

## A-Matrix

$$A = \begin{bmatrix} (1 - \delta)\bar{K} & 0 & 0 & -\bar{C} & 0 \\ 0 & \mu & 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(1 - \phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

# G-Matrix

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



## Beurteilung

- Die B Matrix ist nicht invertierbar
- Daher kann die Blanchard-Kahn Methode für diese Version des Hansen Modells nicht angewandt werden

## Die Schur Methode

- Durch Dekomposition der Matrizen  $B$  und  $A$  lässt sich das System lösen
- Weiterhin sind alle Matrizen reell, in der Blanchard Kahn Methode sind komplexe Matrizen möglich

## Die Schur Dekomposition

Eine generalisierte Schur Dekomposition geht von zwei Matrizen (A und B) aus, die (üblicherweise unter Verwendung eines QZ Algorithmus) in die Matrizen T, S, Q und Z aufgelöst wird.

$$B = QTZ'$$

$$A = QSZ'$$

Q und Z haben hierbei besondere Eigenschaften

$$QQ' = Q'Q = I = ZZ' = Z'Z$$

und die Matrizen S und T sind obere Dreiecksmatrizen.

## Eigenwerte

Die Eigenwerte des Systems sind durch  $\lambda_{ii} = s_{ii}/t_{ii}$  gegeben, wobei  $s_{ii}$  und  $t_{ii}$  die zugehörigen Diagonalelemente der Matrizen T und S sind. Üblicherweise geben Softwareprogramme die Lösung geordnet aus.

## Das deterministische Modell

Für das deterministische Modell gilt

$$QTZ' \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} = QSZ' \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$$

Wir multiplizieren beide Seiten mit der Inversen von Q und lösen die schreiben die beiden verbliebenen Matrizen in partitionierter Form auf

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z'_{11} & Z'_{12} \\ Z'_{12} & Z'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z'_{11} & Z'_{12} \\ Z'_{21} & Z'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## Instabile Eigenwerte

oder bei Konzentration auf die Gleichungen mit instabilen Eigenwerten

$$T_{22} [Z'_{21}x_{t+1} + Z'_{22}E_t y_{t+1}] = S_{22} [Z'_{21}x_t + Z'_{22}y_t]$$

hierbei ist die Notation identisch mit  $Z'_{ij}$  als  $ij$ -ter Teil der Partition der  $Z'$  Matrix.

# Stabilität

Damit das System stabil ist muss gelten

$$Z'_{21}x_t + Z'_{22}y_t = 0$$

Damit diese Bedingung hält, muss für die Jump-Variablen zum Zeitpunkt  $t$  folgende Identität gelten

$$y_t = -(Z'_{22})^{-1}Z'_{21}x_t = -Nx_t$$

wobei  $N \equiv (Z'_{22})^{-1}Z'_{21}$ .

## Lösung

Die Form des Ergebnisses ist identisch zur Blanchard-Kahn Lösung, jedoch verwenden wir hier die Submatrizen der Schur-Dekomposition. Das Modell kann beschrieben werden in der Form

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ -Nx_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ -Nx_t \end{bmatrix}$$

Wobei die obere Hälfte des Differenzialsystems

$$[B_{11} - B_{12}N] x_{t+1} = [A_{11} - A_{12}N] x_t$$

lautet. Die Lösung des Systems ist demnach

$$x_{t+1} = [B_{11} - B_{12}N]^{-1} [A_{11} - A_{12}N] x_t$$



## Lösung des Systems

- Wir verwenden nun die Steady-State bereits ermittelten Werte und berechnen die Matrizen

$$B = \begin{bmatrix} 12.6695 & 0 & -1.2353 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & .36 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -.03475 \end{bmatrix}$$

# A Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 12.353 & 0 & 0 & -.9186 & 0 \\ 0 & .95 & 0 & 0 & 0 \\ .36 & 0 & 0 & -.64 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

## Schur Dekomposition

Nach der Schur Dekomposition können die Matrizen A und B in die vier Matrizen S, T, Q und Z aufgelöst werden

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -6.0713 & 2.5534 & -56797 & -0.4798 \\ 0 & 5.2880 & -3.3924 & 6.2982 & 0.1563 \\ 0 & 0 & 0.7200 & 0.6793 & -0.0954 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9103 & 0.5953 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .8228 \end{bmatrix}$$

## T-Matrix

$$T = \begin{bmatrix} 1.6296 & -6.5107 & 3.6395 & -6.0515 & -0.1748 \\ 0 & 5.6147 & -2.9158 & -5.2866 & -0.2382 \\ 0 & 0 & 0.7579 & 0.6832 & -0.9014 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8488 & 0.7907 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Q-Matrix

$$Q = \begin{bmatrix} -0.758 & 0.6507 & 0.0124 & 0.0427 & 0 \\ 0 & 0 & -0.6993 & 0.2034 & 0.6853 \\ 0.2209 & 0.2562 & 0.624 & -0.1633 & 0.6853 \\ 0.6137 & 0.7116 & -0.2093 & 0.1115 & -0.2467 \\ 0 & 0.0682 & -0.2786 & -0.958 & 0 \end{bmatrix}$$

## Z-Matrix

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 0.6779 & -0.3668 & 0.6371 & 0 \\ 0 & 0 & -0.53 & -0.3051 & 0.7912 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3604 & -0.4318 & -0.6321 & -0.533 \\ 0 & -0.6407 & -0.631 & 0.3185 & -0.2998 \end{bmatrix}$$

## Eigenwerte

Die Eigenwerte des Systems werden durch Division der Diagonalelemente von S durch die zugehörigen Elemente von T gefunden

$$\text{Eigenwerte} = \begin{bmatrix} 0/1.6296 \\ 5.2880/5.6147 \\ 0.7200/0.7579 \\ 0.9103/0.8488 \\ 0.8228/0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.9418 \\ 0.9500 \\ 1.0725 \\ \infty \end{bmatrix}$$

## Bewertung

- Die ersten drei Elemente des Eigenwertvektors haben Werte kleiner Null
  - Diese Elemente beschreiben die stabilen Wurzeln des Systems
- Die letzten beiden Elemente sind größer als Eins
  - Diese Werte sind außerhalb des Einheitskreises und daher instabil



## Nicht vordefinierte Variablen

Unter Verwendung dieser Matrizen kann der Prozess der nicht vordefinierten Variablen zum Zeitpunkt  $t$  beschrieben werden

$$\begin{bmatrix} \tilde{C}_t \\ \tilde{r}_t \end{bmatrix} = -N \begin{bmatrix} \tilde{K}_t \\ \tilde{\lambda}_{t-1} \\ Y_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5317 & 0.4468 & 0 \\ -0.9452 & 1.8445 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{K}_t \\ \tilde{\lambda}_{t-1} \\ Y_{t-1} \end{bmatrix}$$

## Vordefinierte Variablen

Der deterministische Prozess der vordefinierten Variablen lautet

$$[B_{11} - B_{12}N] \begin{bmatrix} \tilde{K}_{t+1} \\ \tilde{\lambda}_t \\ \tilde{Y}_t \end{bmatrix} = [A_{11} - A_{12}N] \begin{bmatrix} \tilde{K}_t \\ \tilde{\lambda}_{t-1} \\ \tilde{Y}_{t-1} \end{bmatrix}$$

## Numerische Lösung I/

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 12.67 & 0 & -1.26 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & .36 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.53 & -0.447 & 0 \\ 0.9452 & -1.845 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{K}_{t+1} \\ \tilde{\lambda}_t \\ \tilde{Y}_t \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} 12.353 & 0 & 0 \\ 0 & .95 & 0 \\ .36 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -.919 & 0 \\ 0 & 0 \\ -.64 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.532 & -0.447 & 0 \\ 0.9452 & -1.845 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{K}_t \\ \tilde{\lambda}_{t-1} \\ \tilde{Y}_{t-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## Numerische Lösung II/

$$\begin{bmatrix} \tilde{K}_{t+1} \\ \tilde{\lambda}_t \\ \tilde{Y}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.6697 & 0 & -1.235 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & .36 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 11.865 & -0.410 & 0 \\ 0 & 0.95 & 0 \\ 0.0197 & -0.286 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{K}_t \\ \tilde{\lambda}_{t-1} \\ \tilde{Y}_{t-1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0.9418 & 0.1475 & 0 \\ 0 & 0.95 & 0 \\ 0.0548 & 1.8446 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{K}_t \\ \tilde{\lambda}_{t-1} \\ \tilde{Y}_{t-1} \end{bmatrix}$$